# Ασκήσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

2 Νοεμβρίου 2015

## 4ο Μάθημα - Χώροι με Νόρμα, Διαχωρισιμότητα

**Άσκηση 1.** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x, y \in X$.

(α΄) Να δείξετε ότι οι μπάλες του $X$ είναι κυρτά σύνολα και να βρεθούν οι διάμετροί τους.

(β΄) Να δειχθεί ότι $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

(γ΄) Να δειχθεί ότι η νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

(δ΄) Να δειχθεί ότι $\|x\| \leq \max\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$.

(ε΄) Να δείξετε ότι μια ευθεία στον $X$ δεν μπορεί να τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα σε ακριβώς τρία σημεία.

(στ΄) Ισχύει ότι κάθε ευθεία στον $X$ τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα σε το πολύ δύο σημεία;

**Άσκηση 2.** (α΄) Να αποδείξετε ότι ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, με $X \neq \{0\}$, δεν έχει μεμονωμένα σημεία και δεν είναι ποτέ συμπαγής.

(β΄) Να δείξετε ότι η μοναδιαία σφαίρα του $\ell_\infty$ αποτελεί παράδειγμα κλειστού και φραγμένου συνόλου το οποίο **δεν** είναι συμπαγές. (*Υπόδειξη: Για τη συμπάγεια, αρκεί να βρείτε ακολουθία στο $S_{\ell_\infty}$ χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία.*)

**Άσκηση 3.** Έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $B = \{b_i : i \in I\}$ μια Hamel βάση του. Για κάθε $x \in X$ με $x = \sum_{i \in F} \lambda_i b_i$ ορίζουμε $\|x\|_1 = \sum_{i \in F} |\lambda_i|$.

(α΄) Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|_1$ αποτελεί νόρμα.

(β΄) Αν η $B$ είναι υπεραριθμήσιμη, να δειχθεί ότι ο $(X, \|\cdot\|_1)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

**Άσκηση 4.** (i) Να δειχθεί ότι ο $c_0$ είναι διαχωρίσιμος. (*Υπόδειξη:* $\overline{(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)} = c_0$.)

(ii) Να δειχθεί ότι οι χώροι $(\ell_p, \|\cdot\|_\infty)$ για $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι.

(iii) (α΄) Να δείξετε ότι κάθε χώρος με νόρμα με αριθμήσιμη βάση Hamel είναι διαχωρίσιμος.

(β΄) Έστω $\Lambda$ το υποσύνολο του $c$ το οποίο αποτελείται από τις τελικά σταθερές ακολουθίες. Να δειχθεί ότι το $\Lambda$ είναι υπόχωρος και να βρεθεί μια Hamel βάση του.

(γ΄) Να δείξετε ότι ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών $c$ είναι διαχωρίσιμος. (*Υπόδειξη: Ο $\Lambda$ είναι πυκνός στον $c$.*)

**Άσκηση 5.** (i) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $B_X$ η μοναδιαία μπάλα του. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in B_X$.

(ii) Θεωρείστε τον $\mathbb{R}^N$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. Να δείξετε ότι

(α) $B_{\mathbb{R}^N} = \mathrm{co}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_N\}$.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^N$ κυρτό με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in A$, τότε το $0$ αποτελεί εσωτερικό σημείο του $A$.